



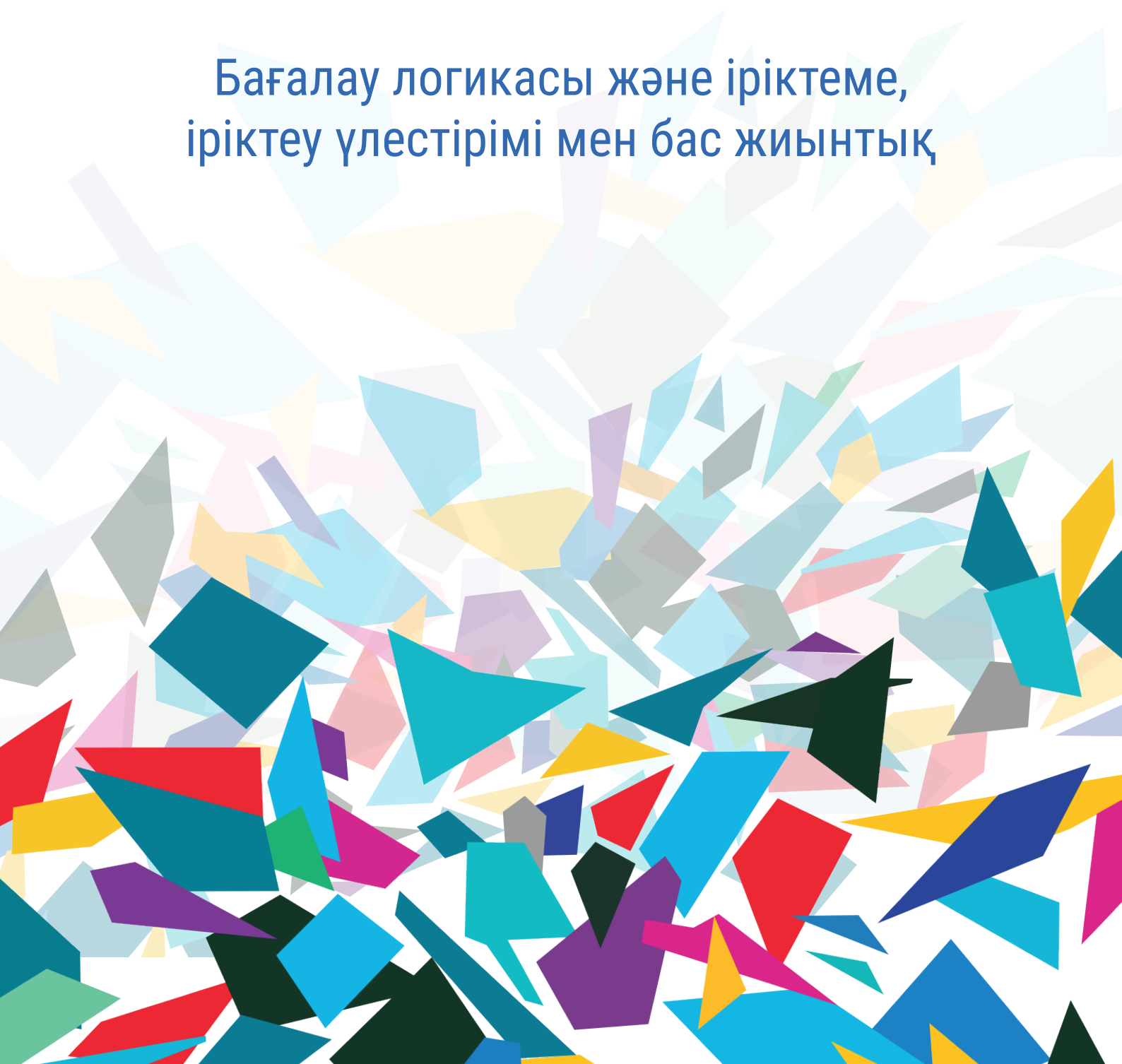
12-дәріс



ҚАЗАҚСТАННЫҢ
АШЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

СТАТИСТИКА НЕГІЗДЕРІ

Бағалау логикасы және іріктеме,
іріктеу үлестірімі мен бас жиынтық





Кітап: Статистика негіздері

Дәріс: Бағалау логикасы және іріктеме, іріктеу үлестірімі мен бас жиынтық

Күнделікті тұрмыста біз сәтті күндер, сәтсіз күндер деп күндерді бөліп жатамыз. Сенсеңіз бұндай күндерді анықтауда да статистиканың мүмкіншілігі жетерлік. Мысалы, Gallup's Daily Mood индексіне сәйкес, 2013 жылы Ризашылық күнінде америкалықтардың 70%-ы ешқандай стрессіз, алаңсыз «бақыт пен рахат құшағында» өмір сүріп жатқанын мәлімдеген. Мұндай бақытты күндердің қатарын Еске алу күні (65%), Рождество мерекесі (64%), Пасха жексенбісі (62%) және Аналар күні (62%) толықтырады.

Әрине бұл құр сөзге емес, нақты статистикаға негізделген зерттеудің мәлімдемесі.

Зерттеу 1 000-ға жуық америкалықтардан тұратын іріктемеге негізделген, мұндағы зерттеуге сенімділік деңгейі – 95%, ал оның дәлдігі 3% аралығында ауытқып отырады деп бағалаймыз.

Бағалау дегеніміз не? Егер зерттеу сенімді болса, қандай ауытқулар туралы сөз болуы мүмкін екенін бүгінгі тақырыпта толық қарастырамыз. Ендеше кеттік

Дереккөз: Sharp, Lindsey 2014. "Americans Moods Still improve on Holidays and Weekends" <http://www.gallup.com/pol/1167060/americans-moods-sill-improve-on-holidays-and-weekends.aspx>

Жалпы инференциалды статистикада екі негізгі әдіс бар. Оның алғашқысы «бағалау әдісі» деп аталады. Бүгінгі сөз ететін тақырыбымыз да осы бағалау әдісіне арналмақ. Осы тақырып аясында бас жиынтық белгілерін бағалауда іріктемеден есептелген арифметикалық ортаны пайдалануды да үйренесіз. Жалпы бас жиынтық белгілерін бағалауда пропорцияларды да пайдаланады, дегенмен біздің уақытымыздың шектеулі болуына байланысты, сіз оны оқулықтан қарап өз бетіңізбен, арифметикалық ортаны пайдалануға аналогиялы, меңгеріп алуыңызға әбден болады. Ол үшін оқулықта барлық формулалар және мысалдар берілген, сонымен қатар оларды ұғынуда көмекші құрал ретінде рет-ретімен орында қосымшалары өте пайдалы.

Дәрістің мақсаттары келесідей дағдыларды меңгеруді талап етеді:

Тарауды оқығаннан кейін:

1. Бағалау логикасы және іріктеме, іріктеу үлестірімі мен бас жиынтықтың рөлін түсіндіру.
2. Іріктеменің ауытқуы мен тиімділігі концептілерін анықтау және түсіндіру.
3. Іріктеменің арифметикалық ортасын пайдалану арқылы сенімділік интервалдарын құрастыру және интерпретациялау.
4. Сенімді интервалдарды құрастыруда іріктеменің статистикалық әдістерін алу үшін SPSS бағдарламасын пайдалану.

Алғашқы 3 мақсатты сізбен бірге орындаймыз, ал соңғы төртінші тапсырма алған ақпаратты шыңдау үшін сіздің өз бетіңізбен жұмыс істеуге арналған.

Алдымен дәріс аясында пайдаланатын негізгі ұғымдарды ажыратып кетейік

Альфа (α). Сенімді интервал бас жиынтық мәнін қамтымауының ықтималдығы немесе қатенің ықтималдығы. Альфа деңгейлері әдетте 0,10, 0,05, 0,01, 0,001 немесе 0,0001 деңгейінде белгіленеді.

Кездейсоқ іріктеменің ығысуы (bias). Іріктеме статистикасын бағалау әдістері ретінде таңдайтын критерий. Егер статистиканың іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы зерттеліп отырған бас жиынтық мәніне тең болса, онда ол статистика ығысусыз болғаны.

Сенімді интервал. Бас жиынтық мәндерінің ықтимал мәндері, мұндағы ықтимал мәндер диапазоны нақтыланған.

Сенімділік деңгейі. Альфаны білдірудің жиі қолданылатын балама жолы, интервалдық бағаның бас жиынтық мәнін қамтымау ықтималдығы. Ол 90%, 95%, 99%, 99,9%, және 99,99%-дық сенімді деңгейлер сәйкесінше 0,10, 0,05, 0,01, 0,001 және 0,0001 альфаға тиесілі.

Тиімділік/өнімділік. Іріктеме нәтижелерінің іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы айналасында топтастырылу немесе шоғырлану дәрежесі.

Арифметикалық ортаның стандартты қателігі. Іріктемелік арифметикалық ортаның іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы.

Бағалауға (есептеуге) кіріспе

Инференциалды статистиканың осы тармағының мақсаты – іріктемеден алынған статистика арқылы бас жиынтықтың көрсеткіштерін немесе параметрлерін есептеу. Осы әдістердің ең жиі қолданылатыны –



қоғамдық пікір сауалнамалары мен сайлау болжамдары баршаға белгілі. Дауыс берушілер сауалнамалары мен кез-келген тақырыптағы бұқаралық сауалнамалар – ең «маңызды» мәселелерден қарапайым мәселелерге дейін – бұқаралық ақпарат құралдарының және танымал мәдениеттің өнімі болды. Осы дәрісте үйренетін статистикалық әдістер – ең беделді, талғампаз ғылыми зерттеушілер пайдаланатын әдістермен барабар.

Бас жиынтықтың көрсеткіштерін есептеудің стандартты процедурасы – сенімділік интервалдарын құрастыру, яғни бұл - мәндердің белгілі бір интервалы мен диапазоны аралығында жатқан параметрлер туралы мәлімет беретін математикалық тұжырымдама. Мысалы, сенімділік интервалы былай болуы мүмкін «Қала тұрғындары көше атауларының өзгеруін $68 \pm 3\%$ немесе 65%-дан 71%-ға дейінгі аралықта қолдайды» деген. Бұқаралық ақпарат құралдарында әдетте интервалдың орталық мәніне көңіл бөлінсе де (бұл жағдайда 68%), бас жиынтықтың параметрлері (яғни біздің мысалымызда, көше атауларының өзгеруін қолдайтын барлық қала тұрғындарының пайыздық көрсеткіші) 65%-дан 71% аралығында кез-келген жерде болуы мүмкін екенін түсіну маңызды.

Бағалауды таңдау критерийлері: ауытқу және тиімділік

Бағалау процедуралары іріктемелік статистикаға негізделеді.

Әрине онда Бірнеше іріктемелік статистиканың қайсысын қолдануға болады деген сұрақ тууы мүмкін?

Зерттеушілер екі өлшем бойынша таңдау жасайды: ауытқу және тиімділік. Есептеулер қатесіз және салыстырмалы түрде тиімді статистикаға негізделуі тиіс. Осы критерийлердің әрқайсысын жеке дара талдаймыз.

Ауытқу. Егер іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы қарастырып отырған бас жиынтық мәніне тең болса, зерттеушінің қателеспегені. Тараудың басында айтылғандай, берілген теоремаларда іріктеменің арифметикалық ортасы осы шартқа сәйкес. Іріктеу үлестірімінің арифметикалық орташа мәні (μ_x) бас жиынтықтың арифметикалық орташа мәнімен (μ) бірдей.

Іріктеме пропорциялары (P_s) да қате емес. Егер N көлемді қайталанатын кездейсоқ іріктемеден іріктеме пропорциясын есептейтін болсақ, іріктеме пропорцияларының іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы (μ_p) бас жиынтықтың пропорциясына (P_p) тең болады. Демек, тиынды айналдыруды немесе 10 тиыннан тұратын іріктемені ($N = 10$) алатын болсақ, іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы 0,5-ке тең болады, бұл – тиынның айналған кезде бүк түсу (немесе шік) ықтималдығы. Әлеуметтік зерттеулерде кеңінен пайдаланылатын статистиканың ішінде іріктеменің арифметикалық ортасы мен іріктеме пропорциясы ғана қатесіз (яғни, іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы бас жиынтық мәніне тең).

Іріктеменің арифметикалық ортасы мен іріктеме пропорциясы ғана қатесіз болғандықтан, есептегелі отырған бас жиынтық мәндерінің белгілі бір аралығында болу ықтималдығын анықтай аламыз. Түсінікті болу үшін арнайы тапсырманы қарастырайық.

Кез-келген бір қаланың орташа кірісін есептеп көрелік. 500 үй қожалықтарынан құралған кездейсоқ іріктемені ($N = 500$) алдық дейік, іріктеменің орташа кірісі – 45 000\$ болсын. Бұл мысалдағы бас жиынтықтың арифметикалық ортасы (μ) – қаладағы барлық үй қожалықтарының орташа кірісі, ал іріктеменің арифметикалық ортасы (\bar{X}) – іріктемедегі 500 үй қожалығының орташа кірісі болады. Бас жиынтықтың арифметикалық ортасы белгісіз (μ), егер белгілі болса, бізге іріктеме қажет болмас еді.

Дегенмен бізге керегі осы. Негізінен, іріктеменің арифметикалық ортасы (жаңағы айтып өткен 45 000\$) – бас жиынтық туралы ақпарат бере алатындығы үшін маңызды.

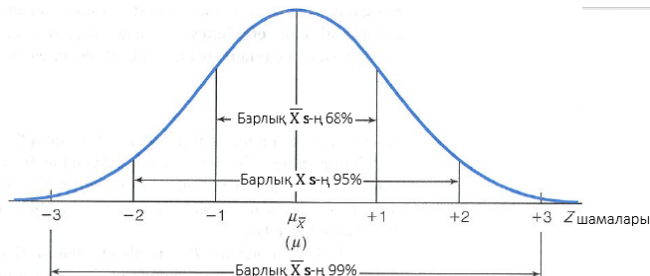
Өткен лекциядағы екі теорема бұл жағдайда барлық ықтимал іріктемелердің арифметикалық ортасы туралы мол ақпарат береді. N үлкен болғандықтан ($N > 100$), іріктеу үлестірімі қалыпты және оның арифметикалық ортасы бас жиынтықтың арифметикалық ортасына тең екенін білеміз ($\mu_x = \mu$). Сондай-ақ, барлық қалыпты үлестірім қисықтары кейстерінің 68%-ы (бұл жағдайда кейстер дегеніміз іріктеменің орташа мәні) $\pm 1 Z$ шама аралығында, 95%-ы – $\pm 2 Z$ шама аралығында, ал кейстердің 99%-дан астамы арифметикалық ортаның $\pm 3 Z$ шама аралығында екенін анықтадық.

Бұл жерде іріктеме үлестірімін, яғни ықтимал іріктеме нәтижелерінің үлестірімін немесе іріктеменің арифметикалық ортасын талқылап отырғанымызды естен шығармаңыз. Ендеше 45 000\$ болатын іріктеменің арифметикалық ортасы үшін жақсы ықтималдық (100 мүмкіндіктен шамамен 68-ге жуығы) $\pm 1 Z$ шама аралығында, өте жақсы (100-ден 95-ке жуығы) $\pm 2 Z$ шама аралығында, ал ең жақсысы (100-ден 99-ы) іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасының $\pm 3 Z$ шама аралығында (ол халықтың орташа мәнімен



тең). Бұл қатынас 6.4-сызбада бейнеленген.

6.4-сызба. Іріктеменің арифметикалық ортасының іріктеу үлестірімінің аудандары



Тиімділік

Есептеудің екінші сипаттамасы – тиімділік, яғни ол іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортаға қатысты қаншалықты шоғырланғандығы немесе топтасқаны дейміз. Тиімділік немесе топтасу – дисперсияның басты мәселесі. Іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы неғұрлым аз болса, соғұрлым топтасу молырақ және тиімділік жоғарырақ болады.

Іріктеменің арифметикалық ортасының іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы немесе орташа стандартты девиациясы – бас жиынтықтың стандартты девиациясын квадрат түбір астындағы N-ге бөлгенге тең ($\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{N}$). Демек, іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы – N-ның кері функциясы: іріктеме көлемі артқан сайын, азаяды. Іріктеменің көлемін арттыру арқылы кез-келген есеп үшін тиімділікті жақсарту аламыз (немесе іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясын азайта аламыз).

Мысал келтірсек, түсініктірек болады. 6.2-кестеде берілген екі үлгіні қараңыз. Екі іріктеменің де арифметикалық ортасы қатесіз, бірақ қайсысының есебі тиімдірек? 1-іріктеме үшін, N 100-ге тең болғандағы барлық ықтимал арифметикалық ортаның іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы 50,00 теңге болады:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{500}{\sqrt{100}} = \frac{500}{10} = 50,00$$

2-іріктеме үшін N 1 000-ға тең болғандағы барлық ықтимал арифметикалық ортаның іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы әлдеқайда төменірек – 15,81 теңге болады:

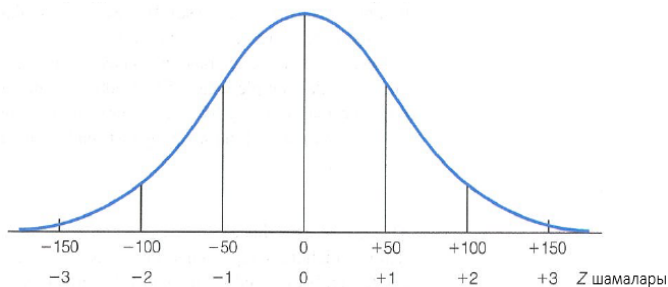
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{500}{\sqrt{1000}} = \frac{500}{31,62} = 15,81$$

2-іріктемедегі іріктеу үлестірімі бірінші іріктемеге қарағанда әлдеқайда топтасқан. Іс жүзінде, ол 15,81 аралығындағы барлық ықтимал арифметикалық ортаның 68%-ын қамтиды, ал дәл осы жағдай үшін 1-іріктемедегі іріктеу үлестірімі 50,00 аралығындағы ауқымды интервалды талап етеді. 1 000 кейсі бар іріктемеге негізделген бағалау 100 кейсті іріктеме бағалауына қарағанда бас жиынтықтың параметрлеріне шамамен жақынырақ болады.

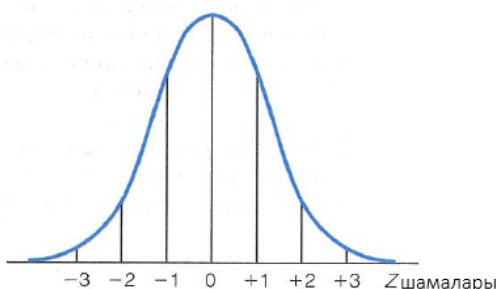
6.2-кесте. Екі іріктеменің іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы. Мұндағы = 500\$

	1-іріктеме	2-іріктеме
Іріктеменің арифметикалық ортасы	$\bar{X}_1 = 45\ 000$ теңге	$\bar{X}_2 = 45\ 000$ теңге
Іріктеме көлемі	$N_1 = 100$	$N_2 = 1000$
Іріктеу үлестірімінің стандартты ауытқуы (немесе Стандартты қатесі)	$\sigma_{\bar{x}_1} = 50,00$ теңге	$\sigma_{\bar{x}_2} = 15,81$ теңге

6.5-сызба. N = 100 және X = 50,00 теңге болғандағы іріктеме үлестірімі



6.6-сызба. $N = 1\,000$ және $X = 15,81$ болғандағы іріктеме үлестірімі



6.5 және 6.6-сызбалар осы қатынастарды график арқылы көрсетеді.

Естеріңізге салсақ, барлық іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы N -нің кері функциясы: неғұрлым іріктеме үлкен болса, соғұрлым топтасу молырақ және тиімділік жоғарырақ болады. Сонымен қатар, іріктеме көлемі мен іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы арасындағы бұл қатынастар шағын іріктемелерге қарағанда үлкен іріктемелерде сенімдірек болуы мүмкін (екеуі де EPSEM-ге сәйкес таңдалса) екеніне назар аударудан басқа еш нәрсе бермейді.

Интервалды бағалау процедуралары

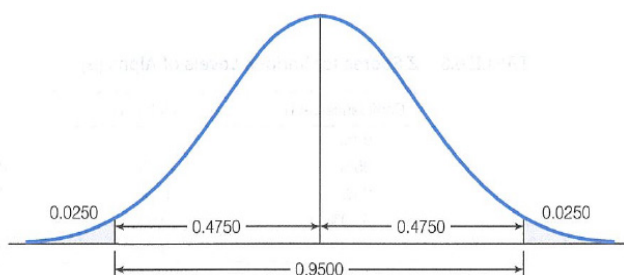
Енді іріктемелік статистикаға сүйене отырып бас жиынтықтың көрсеткіштерін бағалауға дайынбыз. Мұны сенімділік интервалдары немесе математикалық мәлімдеме жасау арқылы жүзеге асырамыз. Сенімділік интервалдарын құрастыру үш кезеңнен тұрады.

Бірінші кезең – сіздің қате жіберуге дайын екеніңізді анықтауға арналған. Егер интервалдық бағалау бас жиынтықтың параметрлерін қамтымаған болса, онда ол – қате. Бұл қатенің ықтималдығы альфа деп аталады (грек әрпі α деп белгіленеді). Альфаның ықтимал мәні зерттелетін жағдайдың сипатына байланысты, алайда көбінесе 0,05 ықтималдығы пайдаланылады. Альфаны 0,05 деп алу – 95% сенімділік деңгейін пайдалану деп те аталады, ең соңында зерттеуші 5% жағдайда ғана қателесе алады дегенді білдіреді. Нақтырақ айтқанда, саны шексіз интервалдар осы альфа деңгейінде құрастырылса (және басқа барлық нәрселер тең болған жағдайда), интервалдардың 95%-ы бас жиынтықтың көрсеткіштерін қамтиды, ал 5%-ы қамтымайды.

Екінші кезең – іріктеу үлестірімін бейнелеу: қате ықтималдығын үлестірімнің жоғары және төменгі жақтарына теңдей бөліп, содан кейін тиісті Z шаманы табыңыз. Мысалы, альфаны 0,05 деп алсақ, осы ықтималдықтың жартысын (0,025-ті) үлестірімнің төменгі жағына, ал екінші жартысын жоғары жағына орналастырамыз.

Осылайша іріктеме үлестірімі 6.7-сызбада көрсетілгендей бөлінеді.

6.7-сызба. α (0,05-ке тең болғандағы іріктеме үлестірімі



Үшінші кезең – сенімділік интервалын құру. Төменде келтірілген бөлімдерде әуелі іріктеменің арифметикалық ортасын, әрі қарай іріктеме пропорцияларын пайдалана отырып, бас жиынтықтың параметрлерінің интервалдық бағасын шығарамыз.

6.3-кесте. Альфаның (α) түрлі деңгейлері үшін Z шамалары

Сенімділік деңгейі	Альфа (α)	$\alpha/2$	Z -шамалары
90%	0,10	0,05	$\pm 1,65$
95%	0,05	0,025	$\pm 1,96$
99%	0,01	0,005	$\pm 2,58$
99,9%	0,001	0,0005	$\pm 3,32$
99,99%	0,0001	0,00005	$\pm 3,90$

Іріктеменің арифметикалық ортасын пайдалану арқылы интервалды бағалау процедуралары (үлкен іріктемелер)

Іріктеменің арифметикалық ортасына негізделген сенімділік интервалының формуласы төменде көрсетілген.

$$c.i. = \bar{X} \pm Z \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$$

6.1-формула

мұндағы $c.i.$ = сенімділік интервалы

\bar{X} = Іріктеменің арифметикалық ортасы

Z = альфа деңгейімен анықталған Z шама

$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$ = іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы немесе арифметикалық ортаның стандартты қателігі

Мысалы ретінде, қауымдастықтың орташа IQ көрсеткішін есептеп көрелік. Айтарлық, 200 тұрғын енгізілген кездейсоқ іріктемедегі IQ-дың арифметикалық ортасы – 105 болсын. IQ көрсеткіштері үшін бас жиынтықтың стандартты девиациясы 15, ендеше α (іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы) 15-ке тең болады. Егер қателесуге 5%-дық мүмкіндік қалдырып, альфаны 0,05 деп алсақ, онда тиесілі Z шама 1,96 болады.

Бұл мәндер тікелей 6.1-формулаға салынып, әрі қарай интервал құруымызға болады:

$$c.i. = \bar{X} \pm Z \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$$

$$c.i. = 105 (1.96) \left(\frac{15}{\sqrt{200}} \right)$$

$$c.i. = 105 (1.96) \left(\frac{15}{14,14} \right)$$

$$c.i. = 105 (1.96) 1,06$$

$$c.i. = 105 2,08$$

Яғни, зерттеліп отырған бас жиынтықтың орташа IQ-і шамамен 102,92 (105 -2,08) мен 107,08 (105 + 2,08) аралығында болады. Барлық ықтимал іріктемелік арифметикалық ортаның 95%-ы $\pm 1,96 Z$ шамасы аралығындағы іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасында болғандықтан (немесе бұл жағдайда



2,08 IQ бірліктері), біздің интервалымыздың бас жиынтық арифметикалық ортасын қамту мүмкіндігі өте жоғары. Іс жүзінде, іріктеменің арифметикалық ортасы $\pm 1,96Z$ шамадан алыс болса да (алайда бұл екіталай), интервалымыз бәрібір іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасын, сәйкесінше бас жиынтықтың арифметикалық ортасын (μ) қамтиды. Тек іріктеменің арифметикалық ортасы іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасының $\pm 1,96Z$ шама аралығынан асатын аз мәндердің бірі болса, онда бас жиынтықтың арифметикалық ортасын қамти алмаймыз.

Бас жиынтықтың стандартты девиациясының мәні мысалда берілген. Бас жиынтық туралы мұндай ақпараттың болуы әдеттен тыс екенін айтудың қажеті жоқ. Көп жағдайда σ (іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясының) мәнін біле бермейміз, алайда оны s арқылы, яғни іріктеменің стандартты девиациясы арқылы есептей аламыз. Өкінішке қарай, s -ті анықтаудың нашар (қате) тәсілі, сондықтан осы қатені түзету үшін формуланы сәл өзгерту қажет. Үлкенірек іріктеме үшін s -тің қатесі интервалға айтарлықтай әсер етпейді.

s белгісіз болған жағдайда өзгертілген формула мынадай:

6.2-формула
$$c.i. = \bar{X} \pm Z \left(\frac{s}{\sqrt{N-1}} \right)$$

Бұл формуланы 6.1-формуламен салыстыра отырып, екі өзгеріс бар екенін ескеріңіз. Біріншісі – σ -ның орнына s қойылған, ал екіншісі – соңғы бөлшектің бөліміндегі квадрат түбір астындағы N орнына квадрат түбір астындағы $N - 1$ деп өзгертілген. Соңғы өзгерту – s жүйелі қатеге ие болғандағыны түзету үшін керек.

Мұнда s -ті σ -мен ауыстыру тек үлкен іріктемелер үшін (яғни, 100 немесе одан көп кейстері бар іріктемелерге) рұқсат етілгенін атап өткім келеді.

Іріктеу үлестірімінің астындағы ауданды табу үшін көлемі 100-ден кіші іріктемелердің арифметикалық ортасының сенімді интервалдарын құруда Student t үлестірімі деп аталатын басқа теориялық үлестірімді пайдалануымыз керек. Сондықтан, t үлестірімін таныстыруды келесі тақырыптарға қалдырып, мұнда тек үлкен іріктемелерді бағалау процедураларына назар аудардық.

Енді 6.2-формуланы пайдалану арқылы іріктеме жаттығуларымен аяқтайық. Жоғарыдағы мысалымызды пайдалана отырып, нақты бір қаланың 500 тұрғынынан тұратын кездейсоқ іріктеменің орташа табысы 45 000\$ -ды құрайды, оның стандартты девиациясы – 200\$. Бас жиынтықтың орташа кірісінің (μ) 95%-дық интервалдық есебі қандай?

Берілгені:

$$X = \$45\,000$$

$$s = \$200$$

$$N = 500$$

және альфаны 0,05 деп алып, экранда көрсетілгендей интервал құрастырамыз:

$$c.i. = \bar{X} \pm Z \left(\frac{s}{\sqrt{N-1}} \right)$$

$$c.i. = 45\,000 \pm (1.96) \left(\frac{200}{\sqrt{499}} \right)$$

$$c.i. = 45\,000 \pm (1.96) \left(\frac{200}{22,34} \right)$$

$$c.i. = 45\,000 \pm (1.96)8,95$$

$$c.i. = 45\,000 \pm 17,54$$

Ол үшін мына жерде келтірілген «рет-ретінмен орында» қосымшасын пайдалануыңызға болады.

Рет-ретінмен орында	6.2-формула арқылы іріктеменің арифметикалық ортасы үшін сенімділік интервалын құрастыру
----------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------

**Реті Орындалуы**

1. 6.3-кестеден альфа деңгейін таңдап, сәйкес Z шаманы табыңыз. Егер альфа деңгейін 0,05 деп алсаңыз, онда Z шама 1,96 болады.
2. Іріктеме мәндерін 6.2-формулаға салыңыз.

6.2-формуланы шешу үшін:

Квадрат түбір астындағы $N - 1$ өрнегін орындаңыз.

1-қадамда тапқан мәнді s – стандартты девиацияға бөліңіз.

2-қадамда тапқан мәнді Z шамаға көбейтіңіз.

3-қадамда тапқан мән – сенімділік интервалы ұзындығының жартысы. Интервалдың басы мен соңын табу үшін іріктеменің арифметикалық ортасынан осы мәнді азайтыңыз және қосыңыз.

жауабы мынадай болды, қаланың орташа кірісі – 44 982,46\$ (45 000 – 17,54) мен 45 017,54\$ (45 000 + 17,54) аралығында. Есте сақтаңыз, бұл интервалда тек 5% қате болуы мүмкін

Енді оны интерпретациялайық

Рет-ретімен орында	Іріктеменің арифметикалық ортасын пайдалану арқылы сенімділік интервалын интерпретациялау
1.	Сенімділік интервалдарын мұндағы элементтердің әрқайсысын анықтайтын бір не екі сөйлеммен баяндаңыз:
2.	Іріктемелік статистика (бұл жағдайда, арифметикалық орта)
3.	Сенімділік интервалы
4.	Іріктеме көлемі (N)
5.	Есептеулер жасап отырған бас жиынтық
6.	Сенімділік деңгейі (мыс., 95%)
Осы мысалдағы құрастырып отырған сенімділік интервалы былай болады: «Бұл қаланың орташа кірісі 45 000\$ 17,54 деп бағаланды. Бағалау 500 респонденттен тұратын іріктемеге негізделді және оның дұрыс екеніне 95% сенімдіміз».	

(Іріктеменің арифметикалық ортасын пайдаланып, сенімді интервал құруды шыңдау үшін оқулықта берілген 6.1, 6.4-6.7, 6.18 және 6.19а-жаттығуларын орындаңыз).

Түсінікті болу үшін тағы бір мысалды қарастырайық

6.1-Статистиканы қолдан. Бас жиынтықтың арифметикалық ортасын бағалау

Қазақстандықтардың бос уақытын зерттеу 1 000 үй қожалықтарынан тұратын іріктеме негізінде жүргізілді дерлік. Респонденттер телеарнаны демалыстың негізгі түрі деп белгілеген. Іріктеме бойынша күніне орта есеппен 3 сағат теледидар көруге жұмсалса, бас жиынтықтың арифметикалық ортасының бағалауы қандай болмақ? Іріктемеден алынған ақпарат мынадай:

X (аифметикалық орта) = 3,0

$s = 2,5$

$N = 1000$

Егер альфаны 0,05 деп алсақ, онда тиесілі Z шама – $\pm 1,96$, ал сенімділік интервалы 95% болады.

$$c.i. = \bar{X} \pm Z \left(\frac{s}{\sqrt{N-1}} \right)$$

$$c.i. = 3,0 \pm (1,96) \left(\frac{2,5}{\sqrt{999}} \right)$$

$$c.i. = 3,0 \pm (1,96) \left(\frac{2,5}{31,61} \right)$$

$$c.i. = 3,0 \pm (1,96)(0,08)$$

$$c.i. = 3,0 \pm 0,16$$

Осы нәтижеге сүйене отырып, бас жиынтық, яғни біздің жағдайымызда қазақстандықтар телеарнаға күніне орта есеппен $3,0 \pm 0,16$ сағат көлемінде уақыт өткізетінін есептеп шығарар едік. Біздің интервалдық есептің төменгі шегі ($3,0 - 0,16$) – 2,84, ал жоғарғы шегі ($3,0 + 0,16$) – 3,16 болады. Сонымен, интервалды белгілеудің тағы бір тәсілі экранда берілген:



$$2,84 \leq \mu \leq 3,16$$

Бас жиынтықтың орташа мәні – 2,84-тен артық не тең және 3,16-дан кем не тең. Альфа 0,05 болғандықтан, бағалауда 5% қате болуы мүмкін (яғни, бас жиынтықтың арифметикалық ортасын қамтымайды).

Енді сөзімізді біраз қорытындылайық

Бірінші, интервалдың қашықтығын (жалпақтығын) бақылау

Арифметикалық орта немесе пропорция үшін сенімді интервал аралығы формуладағы екі бөлшекті өзгерту арқылы жартылай бақылануы мүмкін. Біріншіден, сенімділік деңгейін жоғарылатуға немесе төмендетуге болады, екіншіден, әртүрлі көлемді іріктемелерді жинау арқылы интервалдың кеңейтілуі немесе тарылуы мүмкін.

Зерттеуші қалайтын қателесу дәрежесін бір өзі ғана анықтай алады (яғни, бас жиынтық мәнін интервал бағасына енгізбеу). Нақты сенімділік деңгейі (немесе альфа деңгейі) жартылай зерттеу мақсатына да байланысты болады. Мысалы, ықтимал зиянды дәрі-дәрімектер тексерілсе, зерттеуші өте жоғары сенімділік деңгейін талап ететіні сөзсіз (99,99% немесе тіпті 99,999%). Ал егер интервалдар тек қана «алдын-ала есептеулер» үшін жасалған болса, онда сенімділік деңгейі әлдеқайда төмен болуы мүмкін (мысалы, 90%).

Интервал қашықтығы мен сенімділік деңгейі

Интервал көлемі мен сенімділік деңгейі арасындағы байланыс мынада: сенімділік деңгейлері артқан сайын интервалдар қашықтай түседі. Бұл интуитивті тұрғыда түсінікті болуы тиіс. Жалпақ интервалдар бас жиынтық мәнін көбірек қамтуы мүмкін; демек, оларға артылған сенім де артығырақ болады.

Бұл қарым-қатынасты көрсету үшін қоғамдастықтың орташа кірісін бағалайтын мысалға оралайық. Бұл тапсырмада 500 тұрғынды іріктемемен жұмыс істедік, іріктеменің орташа кірісі – 45 000\$, стандартты девиациясы – 200\$. Біз 95% сенімді интервал құрып, ол іріктемелік арифметикалық орта айналасында 17,54- шамасында созылғанын анықтадық (яғни, интервал 45 000\$ ±17,54 болды).

Егер осы іріктемедегі сенімділік интервалын 90% (сенімділік деңгейі төмен) деп құрастырған болсақ, онда формуладағы Z шама 1,65-ке дейін төмендер еді, ал интервал жіңішкерек болар еді:

$$\begin{aligned}c.i. &= \bar{X} \pm Z \left(\frac{s}{\sqrt{N-1}} \right) \\c.i. &= 45,000 \pm (1.65) \left(\frac{200}{\sqrt{499}} \right) \\c.i. &= 45,000 \pm (1.65)(8.95) \\c.i. &= 45,000 \pm 14.77\end{aligned}$$

Басқа жағынан, сенімділік интервалын 99% деп құрастырған болсақ, Z шама 2,58 дейін артар еді, ал интервал жалпағырақ болар еді:

$$\begin{aligned}c.i. &= \bar{X} \pm Z \left(\frac{s}{\sqrt{N-1}} \right) \\c.i. &= 45,000 \pm (2.58) \left(\frac{200}{\sqrt{499}} \right) \\c.i. &= 45,000 \pm (2.58)(8.95) \\c.i. &= 45,000 \pm 23.09\end{aligned}$$

99,9% сенімділік деңгейінде Z шама 3,32 болады да, ал интервал жалпая немесе арасы созыла түседі:



$$c.i. = \bar{X} \pm Z \left(\frac{s}{\sqrt{N-1}} \right)$$

$$c.i. = 45,000 \pm (3.32) \left(\frac{200}{\sqrt{499}} \right)$$

$$c.i. = 45,000 \pm (3.32)(8.95)$$

$$c.i. = 45,000 \pm 29.71$$

6.5-кестеде төрт интервал топтастырылған, сенімділік деңгейі өскен сайын интервал көлемінің артуын оңай көре аламыз. Сенімділік интервалдарын тек арифметикалық ортаны көрсету үшін қолданғанымынмен, дәл сол қатынастар пропорциялардың сенімді интервалы үшін қолданылады. (Альфа мен интервал жалпақтығы арасындағы байланысты одан әрі зерттеу үшін 6.13-жаттығуды қараңыз).

6.5-кесте. Сенімділік деңгейі артқан сайын сенімділік интервалдарының қашықтығы өседі (барлық жағдайда $X = 45\,000$, $s = 200$, $N = 500$).

Альфа (α)	Сенімділік деңгейі	Интервал	Интервал қашықтығы
0,10	90%	\$45 000 \pm \$14,77	\$29,54
0,05	95%	\$45 000 \pm \$17,54	\$35,08
0,01	99%	\$45 000 \pm \$23,09	\$46,18
0,001	99,9%	\$45 000 \pm \$29,71	\$59,42

Интервал қашықтығы және іріктеме көлемі

Іріктеме көлемі интервал қашықтығымен кері байланыста болады: Іріктеме көлемі артқан сайын интервал қашықтығы қысқарады. Үлкен іріктемелер дәлірек (жіңішкерек) бағалауды береді.

Мысал арқылы анық көрінеді. 6.6-кестеде әртүрлі көлемдегі (N) төрт іріктеменің сенімділік интервалдары берілген. Іріктеме деректері 6.5-кестедегідей, ал сенімділік деңгейі 95%-ды құрайды. Сенімділік интервалдарының есебі ортадағы бағанда, ал әрбір интервалдың қашықтығы оң жақ бағанда көрсетілген.

6.6-кесте. Іріктеме көлемі артқан сайын сенімділік интервалдарының қашықтығы қысқарады (барлық жағдайда $X = 45\,000$, $s = 200$, $\alpha = 0,5$).

N	Сенімділік интервалы	Интервал қашықтығы
100	$c.i. = 45\,000 \pm (1,96) \left(\frac{200}{\sqrt{99}} \right) = 45\,000 \pm 39,40$	\$78,80
500	$c.i. = 45\,000 \pm (1,96) \left(\frac{200}{\sqrt{499}} \right) = 45\,000 \pm 17,55$	\$35,10
1000	$c.i. = 45\,000 \pm (1,96) \left(\frac{200}{\sqrt{999}} \right) = 45\,000 \pm 12,40$	\$24,80
10 000	$c.i. = 45\,000 \pm (1,96) \left(\frac{200}{\sqrt{9999}} \right) = 45\,000 \pm 3,92$	\$7,84

Интервал қашықтығының азаюы (немесе нақтылықтың артуы) іріктеме көлемімен тұрақты немесе сызықтық қатынаста болмайтынын ескеріңіз. Мысалы, $N = 500$ болғандағы іріктеме $N=100$ қарағанда 5 есе үлкен, бірақ интервал бес есе жіңішке (қашықтығы аз). Бұл маңызды байланыс, себебі бағалаудың нақтылығын айтарлықтай жақсарту үшін N -ді бірнеше есе көбейту қажет болуы мүмкін. Зерттеу жобасының құны іріктеме көлеміне тікелей байланысты болғандықтан, бұл қатынас бағалау процедураларында тиімділік төмендейді дегенді білдіреді. $N = 10\,000$ болғандағы іріктеме $N = 5000$ болғандағы іріктемеден



екі есе қымбат болады, бірақ үлкен іріктемеге негізделген бағалаулар екі есе дәл болмайды.

(Іріктеме көлемі мен интервал қашықтығы арасындағы байланысты әрі қарай зерттеу үшін 6.14-жаттығуларын орындаңыз).

Сыни көзқарас: қоғамдық пікір сауалнамалары

Қоғамдық пікір сауалнамалары АҚШ-пен қатар, басқа да қоғамдардың күнделікті тұрмысының құрамдас бөлігі болып барады. Осы орайда төмендегідей тұжырымдар Интернет пен БАҚ беттерінен жиі көрініп жүр:

- Жағармай құнының қымбаттау салдарынан жүргізушілердің 55%-ы жүргізу дағдыларын өзгерткен.
- Сайлаушылардың 40%-ы Штат сенаты мүшесіне Республикалық партия үміткері үшін дауыс беруі мүмкін.
- Президенттің қолдау деңгейі 48% құрайды.
- Америкалықтардың 17%-ы соңғы 6 айда ересектерге арналған фильмдер көрген.

Бұл тұжырымдарға қаншалықты сенім артуға болады? «Олар бұл сауалнамалардағы сандарды қайдан алған? Олар мен танитындардан ешкіммен сөйлескен жоқ» деген сұрақ мазалады ма (немесе біреудің айтқанын естігенсіз бе)? Төменде сауалнама нәтижелерін қарастыруда есте сақтауға арналған бірнеше мәселе бар:

1. Дереккөзді қараңыз: Сіз «қоғамның» қалай сезінетінін не ойлайтынын сипаттауға әрекет жасағанда, тұжырымның дереккөзін тексеруіңіз қажет. Әдетте, беделді сауалнама орталықтарынан (мысалы, Gallup) немесе ұлттық жаңалықтар көзінен (CBS News, USA Today) алынған есептерге жоғары сенім, ал партизандық мақсаттарда жүргізілген сауалнамаларға аз сенім арта аласыз (яғни, саяси партиялар немесе инициативті топтар сияқты нақты бір көзқарасты білдіретін ұйымдардың сауалнамалары).

2. Сұрақты қараңыз: Кәсіби қоғамдық пікірді зерттеушілер өз сұрақтарын бейтарап және нақты жауапты талап етпейтін болуы үшін көп еңбектенеді.

3. Десек те сұрақтарды мұқият тексеріп шығуыңыз, сонымен қатар адамдардың белгілі бір жолмен жауап беруіне әсер ететін сөйлемдер не «себепші» тіркестерге сыни қарауыңыз керек. Мысалы, зерттеушілер «сіздің қаладағы көше атауларының өзгеруіне қарым қатынасыңыз қандай» деудің орнын «сіз көше атауларының өзгеруіне наразысыз ба» десек сөзсіз әртүрлі нәтижелерді аламыз.

4. Есептің тұтастығын қараңыз: Баяндалған ақпарат ауқымын тексеріңіз. Кәсіби зерттеу орталықтары интервал бағалауларын пайдаланады, ал бұқаралық ақпарат құралдары бағалау статистикасын пайдаланады (мысалы, «қазақстандықтарға жүргізілген сауалнама барысында сұралғандардың 47%-ы аралас некені қолдаған»), интервал қашықтығын да баяндайды («Бұл бағалау $\pm 3\%$ аралығына дейін дәл келеді» немесе «сауалнама нәтижелеріндегі іріктеме қателігі – $\pm 3\%$ »), альфа деңгейі (әдетте 95%-дық сенімділік деңгейі) және іріктеме көлемін де («1458 үй қожалықтары сұралды» деп) хабарлайды. Егер осы ақпараттың бірі жоқ болса, бұл сауалнама күмән тудырады.

5. Іріктемені қараңыз: Іріктеменің көлемінің дұрыстығын ғана емес, репрезентативтілігін де тексеріңіз. Дәлірек айтқанда, ақпараттық бағдарламаларда қолданылатын «көшедегі адам» және медиа құралдарындағы «біздің оқырмандарымыз бен көрермендеріміздің пікірі» сияқты жалпақ жұрттық тәсілге негізделген есептерге сыни көзбен қарау керек. Мұндай есептер қызықты, тіпті пайдалы болуы да мүмкін. Бірақ олар осыған дейін айтылған EPSEM іріктемелеріне негізделмеген, сондықтан нәтижелері генерализациялана алмайды не нақты респонденттерден басқа ешкімге қатысты қолданыла алмайды.

Осылайшы бүгінгі сөзіміздің Түйіні

1. Бас жиынтықтың мәндері іріктеме мәндері арқылы бағаланады. Пропорцияларға немесе арифметикалық орталарға негізделген сенімді интервалдар арқылы бас жиынтық мәні нақты мәндер аралығында болатынын есептей аламыз. Интервалдың қашықтығы – қателесуге дайын тәуекел функциясы (альфа деңгейі) және іріктеме көлемі. Қателесу ықтималдығы төмендеген және іріктеме көлемі азайған сайын интервал қашықтығы ұзарады.

2. Іріктеме статистикасына негізделген бағалаулар қатесіз және салыстырмалы түрде тиімді болуы керек. Барлық іріктеме статистикасы ішінде тек арифметикалық орта мен пропорциялар ғана қатесіз (ауытқымаған). Осы статистиканың іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы сәйкесінше бас жиынтық мәндеріне тең. Тиімділік көбінесе іріктеме көлеміне қатысты мәселе болып табылады/болады. Неғұрлым іріктеме үлкен болған сайын соғұрлым іріктеу үлестірімінің стандартты девиациясы төмен, іріктеме



Кітап: Статистика негіздері

Дәріс: Бағалау логикасы және іріктеме, іріктеу үлестірімі мен бас жиынтық

нәтижелері іріктеу үлестірімінің арифметикалық ортасы айналасында тығыз топтастырылған, ал бағалау тиімдірек болады.

Бүгінгі дәріс осымен тәмам, назар қойып тыңдағаныңыз үшін алғыс білдіремін!