



9-дәріс



ҚАЗАҚСТАННЫҢ
АШЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

СТАТИСТИКА НЕГІЗДЕРІ

Ықтималдықтарды бағалау үшін
қалыпты қисықты қолдану





Тарауды оқығаннан кейін ықтималдық тұрғысынан қисық астындағы аудандарды бөліп көрсете аласыз. Бұл тарауда көрсетілетін статистикалық техникалар мына мәселелер үшін пайдаланылады:

- Белгілі бір оқиғалардың пайда болу ықтималдығын бағалау. Мысалы: «Кездейсоқ таңдалған студенттің осы тест бойынша 100-ден жоғары нәтижеге жету ықтималдығы 100-ден 23-ке тең».

Осыған дейін, теориялық тұрғыдан қалыпты қисықты шамалардан жоғары, төмен және олардың арасындағы аудандарды сипаттау әдісі ретінде қарастырдық. Осы аудандардың шамалардан жоғары, төмен, сондай-ақ олардың арасындағы сандарға айналуы мүмкін екенін көрдік.

Бұл тақырыпта қалыпты қисықты қосымша пайдалану жолдарын қарастырамыз. Ол ықтималдықтарды немесе белгілі бір оқиғалардың орын алу мүмкіндігін бағалау үшін пайдаланылады. Біз ықтималдықтарды табу үшін осы тарауда аудандарды табу үшін қолданылған әдістерді қолданамыз. Бұл секцияда енгізілген жалғыз жаңа идея - теориялық тұрғыдан алғандағы қалыпты қисық астындағы аудандарды (немесе А аппендиксінде) ықтималдықтар деп санауға болады. Ендеше алдымен «ықтималдықты» түсініп алайық.

Ықтималдықтарды бағалау

Күнделікті өмірде бұған белгілі бір жүйе деп қарамаймыз, тіпті қатаң ұстанымнан еш ауытқымаймыз, бірақ ықтималдықтар өмірде жиі ұшырасады. Шын мәнінде, біз өз әрекетімізді белгілі бір оқиғалардың орын алу ықтималдығы тұрғысынан бағалаймыз. Біз үнемі өзімізге “Жауын жауу ықтималдығы қандай?”, “Покерге дөп түсіруді ойша пайымдауға бола ма?”, “Менің көлігімнің ескірген дөңгелектері ұшып кетуі мүмкін бе?”, “Мен оқымасам да тест тапсыра аламын ба?” деген сұрақтар қоямыз (және оларға жауап береміз).

Осы жағдайдағы ықтималдықты бағалау үшін алдымен «жетістіктің» не екенін анықтап алайық. Алдыңғы мысалдар жетістіктің бірнеше анықтамаларынан тұрады (жаңбыр, нақты бір картаның дөп түсуі, дөңгелектердің ұшып кетуі, тест тапсыру). Ықтималдықты анықтау үшін оның бөлшектері жасалуы керек, мұнда бөлшектің алымы жетістікті құрастыратын оқиғалардың санына тең, ал бөлімі жетістік теориялық тұрғыдан мүмкін болатын оқиғалардың жалпы санына тең:

$$\text{Ықтималдық} = \frac{\text{\#жетістіктер}}{\text{\#оқиғалар}}$$

Мұны түсіндіру үшін ойнатылымда арнайы тандалып алынатын картаның түсу ықтималдығын білуіміз қажет деп есептейік, айталық, бұл жақсылап араластырылған колодадағы жүректі патша. Біз айрықша жетістікті анықтаймыз (жүректі патшаның түсуі), сондықтан берілген ақпаратқа сүйене отырып бөлшек құрастыра аламыз. Жетістік ұғымына сай келетін тек қана бір карта бар, сондықтан жетістікті құра алатын оқиғалардың саны да 1; бұл мән бөлшектің алымы болады. Мұнда 52 мүмкін жағдай бар (яғни, колодада 52 карта бар), осылайша бөлшектің бөлімі 52 болады. Сондықтан $1/52$ бөлшегі ойналымда жақсылап араластырылған колодадағы таңдалып алынған жүректі патшаның түсу ықтималдығын көрсетеді. Біздің жетістікке жету (сәттілік) ықтималдығымыз – 52-ден 1.

Бұл бөлшекті сол күйінде қалдыра аламыз немесе басқа жолмен өрнектеуге де болады. Мысалы, бөлшекті аударыстыра отырып, мүмкіндіктердің қатынасы ретінде көрсете аламыз, яғни, ойында жүректі патшаның таңдалуы 52:1 (немесе 52-ден 1). Алымды бөлімге бөлу арқылы бөлшекті пропорция түрінде көрсете аламыз. Мысалда алынған пропорция – 0,0192, бұл сәттілікті анықтайтын барлық ықтимал жағдайлардың пропорциясы. Әлеуметтік ғылымдарда ықтималдық пропорция ретінде беріледі, сондықтан секцияның қалған бөлігінде осы конвенцияны ұстанамыз. “Ықтималдықты” көрсететін p -ді пайдалана отырып, жүректі патшаның түсу ықтималдығын (немесе кез-келген арнайы карта) былай бейнелеуге болады:

$$p \text{ (жүректі патша)} = \frac{\text{\#жетістіктер}}{\text{\#оқиғалар}} = 1/52 = 0,0192$$

Осында тұжырымдалғандай, ықтималдықтың нақты мағынасы бар: ұзақ мерзімде жетістік ретінде анықталатын оқиғалардың жалпы санымен белгілі бір пропорционалды байланысқа ие болады. Жалғыз ғана ойналатын таңдалып алынған жүректі патшаның ықтималдығы 0,0192, шын мәнінде, 52 картадан тұратын, жақсылап араластырылған, колодадағы мыңдаған варианттардан бір уақытта бір ғана картаның сәтті түсу пропорциясы 0,0192 болады дегенді білдіреді. Немесе әрбір 10 000 ойналымда 192 жүректі



патша болады, ал қалған 9 808 таңдау басқа карталарға түседі. Осылайша, жалғыз ойнатылымда жүректі патшаның түсу ықтималдығы 0,0192 болады дегенде, осы жалғыз ойналымнан алған білімімізді негізге ала отырып, мыңдаған ойналымдарда не болатынын білу үшін қолданамыз.

Пропорциялар сияқты ықтималдықтар да 0,00-ден (яғни, оқиғаның пайда болу мүмкіндігі мүлде жоқ) 1,00-ге дейін классификацияланады (нақты). Ықтималдықтың мәні артқан сайын, белгілі бір оқиғаның орын алу мүмкіндігі де артады. 0,0192 ықтималдығы 0-ге жақын, демек бұл оқиғаның болуы (жүрек патшасының түсуі) екіталай немесе мүмкін емес дегенді білдіреді.

Бұл әдістер кез-келген жағдайдағы қарапайым ықтималдықтарды орнату үшін пайдаланылуы мүмкін, олай болса жетістіктердің санын және оқиғалардың жалпы санын ерекше көрсете аламыз. Мысалы, бір ойын сүйегінің алты жағы немесе беті бар, әрқайсысында 1-ден 6-ға дейін әр түрлі мәндер бар. Демек, ойын сүйегін бір лақтырғанда белгілі бір санның (мысалы, 4-ті) түсу ықтималдығы

$$p(4\text{-ке лақтыру}) = 1/6 = 0,1667\text{-ге тең.}$$

Ықтималдық және қалыпты қисық

Ықтималдық туралы осындай тәсілді қалыпты қисық туралы теориялық білімімізбен біріктіру белгілі бір ауқымда баллдары бар кейстің таңдалу мүмкіндігін бағалауға мүмкіндік береді. Мысалы, ерлердің IQ балдарының үлестірімінен кездейсоқ таңдалып алынған субъектінің IQ балы 95, ал арифметикалық ортасы 100 болатынын болжап көрелік. Бұл жердегі жетістікті біз көрсетілген ауқымдағы балмен кез-келген субъектінің таңдалуы деп анықтамаймыз. Әдетте, келесі қадамда белгілі бір ауқымдағы ұпайлары бар субъектілер санына тең алымымен және субъектілердің жалпы санына тең бөлімімен бөлшек құрамыз. Алайда, эмпирикалық үлестірім қалыпты болса, бұл қадамды өткізіп жібере аламыз, өйткені ықтималдықтар пропорционалды түрде А аппендиксінде беріліп қойған. Яғни А аппендиксіндегі аудандар ықтималдықтар ретінде түсіндіріледі.

Кездейсоқ таңдалған кейс 95 пен арифметикалық орта арасындағы балға ие болатын ықтималдықты анықтау үшін бастапқы балды Z шамаға ауыстыра аламыз:

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s} = \frac{95 - 100}{20} = \frac{5}{20} = -0,25$$

А аппендиксін пайдалана отырып, осы шама мен арифметикалық орта арасындағы ауданның 0,0987 екенін таптық. Біз іздеп отырған ықтималдық – осы. 95 пен 100 аралығында бал болатын кездейсоқ таңдалған кейстің ықтималдығы 0,0987 (немесе 0,1-ге дейін дөңгелектелген, немесе 10-нан 1). Осылайша, кез-келген ауқымдағы балдардан субъектінің таңдалу ықтималдығын бағалауға болады. Ықтималдықтарды бағалау аудандарды іздестіру тәсілдері сияқты.

Қосымша мысал үшін, кездейсоқ таңдалған ер адамның IQ деңгейі 123-тен төмен болатынының ықтималдығы қандай? Аудандарды тапқан сияқты, тура сондай жолмен ықтималдықты табамыз. Хі шамасы арифметикалық ортадан жоғары және 5.4-кестедегі нұсқауларға сүйене отырып, b бағанындағы ауданды 0,5000-ға қосу арқылы іздестіріп отырған ықтималдықты таба аламыз:

Әрі қарай, осы шама мен арифметикалық орта арасындағы ауданды табу үшін А аппендиксіндегі b бағанына назар аударыңыз. Содан соң ауданды (0,3749) 0,5000-ға қосыңыз. IQ деңгейі 123-тен төмен болатын ер адамның таңдалу ықтималдығы $0,3749 + 0,5000$, яғни 0,08749. Осы мәнді 0,88-ге дөңгелектей отырып, осы ауқымдағы IQ деңгейі бар ер адамды таңдау шансы өте жоғары (0,88) деп айта аламыз. Техникалық тұрғыдан, ықтималдық ұзақ мерзімді кезеңде не болатынын білдіреді: шексіз сынаудан өткізудің нәтижесінде белгілі болғандай, осы топтан таңдалған әрбір 100 ер адамның 88-інің IQ деңгейі 123-тен төмен, ал қалған 12 адамның баллы төмен емес.

Ықтималдық пен қалыпты қисық туралы өте маңызды нәрсені атап өтейік. Қалыпты үлестірімнен кездейсоқ таңдалып алынған кез-келген кейстегі бал арифметикалық ортаға жақын болатынының ықтималдығы өте жоғары. Қалыпты қисық кейстердің басым бөлігі арифметикалық орта төңірегінде топтастырылған пішінде болады, одан алыстаған кезде (оңға немесе солға болсын) жиілігі бойынша азаяды. Шын мәнінде, қалыпты қисық туралы білетінімізді ескере отырып, арифметикалық ортаның стандартты девиациясы ± 1 мәнді кездейсоқ іріктелген кейстің ықтималдығы 0,688 болады. Шыққан санды дөңгелектей отырып, 100 кейстің 68-і немесе барлық іріктелген кейстердің үштен екі бөлігінен сәл



астамы ұзақ уақыттық мерзімде арифметикалық ортадан ± 1 стандартты девиациялар немесе Z шамалар арасында жатқан балға ие болады деп айта аламыз. Кездейсоқ таңдалған кейсте арифметикалық ортаға жақын шама бар болғанда ықтималдық жоғары болады.

Керісінше, арифметикалық ортадан үш стандартты девиациядан асатын балы бар кейстің ықтималдығы өте төмен. 3,00 мәнді Z шама үшін C бағанын (« Z балдан тыс аудан») қарасаңыз, 0,0014 мәнін табасыз. Оның жоғары жағындағы (+3.00-ден кейінгі) ауданды төменгі жағына (-3.00-ден кейінгі) қосу бізге $0,0014 + 0,0014$ қосындыны береді, одан 0,0028 шығады. Өте жоғары немесе өте төмен балы бар таңдалған кейстің ықтималдығы – 0,0028. Егер қалыпты үлестірімнен кейстерді кездейсоқ таңдайтын болсақ, әрбір 10 000 сынаудан $\pm 3,00$ -ден асатын Z шамаларды тек 28 рет ғана таңдай аламыз.

Есте сақтайтын нәрсе, шамалары арифметикалық ортаға жақын кең таралған, ал арифметикалық ортадан тым жоғары немесе тым төмен балдары бар кейстер сирек кездеседі. II бөлімдегі инференциалды статистиканы түсіну үшін бұл байланыс аса маңызды.

Сонымен, Ықтималдықты табу үшін

1. Z шаманы (немесе балдарды) есептеңіз. Балдың оң немесе теріс екенін ескеріңіз.
2. Қалыпты қисық кестесінен Z шаманы табыңыз (A аппендиксі).
3. Әдеттегідей («Статистика негіздері»/«The Essentials of Statistics: A Tool for Social Research» оқулығындағы “Рет-ретімен орында” қосымшасын қараңыз) шамадан жоғары немесе төмен жатқан (немесе балдар арасындағы) ауданды тауып, нәтижесін пропорция арқылы өрнектеңіз. Негізінен, ықтималдықтар 0,00 мен 1,00 арасында болады, ондық үтірден кейін екі санға дейін дөңгелектелген мәндер болуы мүмкін.

Ықтималдықты табу

5.2-Статистиканы қолдан қосымшасында пайдаланылған биологиядан қорытынды емтихан балдарының үлестірімінің арифметикалық ортасы – 72, ал стандартты девиациясы – 8. Кездейсоқ іріктелген студент 61-ден төмен бал алатынының ықтималдығы қандай? 80-нен жоғары, 98-ден төмен жинау ықтималдығы ше? Бұл сұрақтарға жауап беру үшін алдымен Z шаманы есептеп алып, содан соң A аппендиксіне жүгіну қажет. Ықтималдықты табу қажет болғандықтан, пропорция формасындағы аудандарды тастап кетеміз.

61 балдың Z шамасы

$$Z = \frac{Xi - \bar{X}}{s} = \frac{61 - 72}{8} = -\frac{11}{8} = -1,38 \quad \text{болады.}$$

Бұл шама – теріс мән (арифметикалық ортадан төмен немесе сол жағында орналасқан), сондықтан төменде жатқан ауданды қарастырамыз. 5.4-кестені нұсқаулық ретінде пайдалана отырып, C бағанынан теріс балдан төмен ауданды табамыз. Бұл аудан 0,0838 болады. Дөңгелектеп, 61-ден төмен бал алатын студентті таңдау мүмкіндігі 100-ден тек 8 деп айта аламыз. Бұл төмен мән мұндай оқиғаның болуы екіталай дегенді білдіреді.

80 балдың Z шамасы

$$Z = \frac{Xi - \bar{X}}{s} = \frac{80 - 72}{8} = \frac{8}{8} = +1,00 \quad \text{болады.}$$

Z шама – оң, сондықтан 80-нен жоғары ауданды табу үшін C бағанына көз жүгіртейік (5.4-кестені қараңыз). Бұл мән 0,1587 болады. 80-нен жоғары бал алатын студентті таңдау мүмкіндігі 100-ден жуықтап айтқанда 16 болады, бұл 61-ден төмен бал алатын студентті таңдауға қарағанда екі есе артық.

98 балдың Z шамасы

$$Z = \frac{Xi - \bar{X}}{s} = \frac{98 - 72}{8} = \frac{26}{8} = +3,25 \quad \text{болады.}$$

Оң Z шамадан төмен ауданды табу үшін бал мен арифметикалық орта арасындағы ауданды (b бағаны) 0,5000-ға қосамыз (5.4-кестені қараңыз).

Мән $0,4994 + 0,5000$, яғни 0,9994 шығады. Ендеше, кездейсоқ таңдалған студенттің 98-ден төмен бал



алатыны әбден мүмкін.

5,4-кесте. Оң және теріс шамадан жоғары және төмен жатқан аудандарды табу

Ауданды табу	Z шама болғанда	
	Оң	Теріс
Z шамадан жоғары Z шамадан төмен	с бағанына қараңыз 0,5000-ға b бағаны ауданын қосыңыз	0,5000-ға b бағаны ауданын қосыңыз с бағанына қараңыз

Күнделікті өмірдегі статистикасы

Өрекеттегі ықтималдық теориясы. Егер бинго, карта ойындары, ұлттық лотореялар немесе парчиси сияқты құмар ойындарды ұнатсаңыз, онда ықтималдық заңдары туралы біліміңізді жақсы нәтиже мен жеңіске жету мүмкіндігіңізді арттыру үшін қолдана аласыз. Бұл Bringing Down the House бестселлерінде жақсы келтірілген, кейінірек “21” деп аталатын фильмге арқау болды. Кітапта Массачусетс технологиялық институты студенттерінің нар тәуекелге бел буып, ықтималдық теориясы туралы білімін блэkdжек ойынында жеңіске жету үшін пайдаланды. Казиноның қауіпсіздік қызметшілері ойынды тоқтатқанға дейін олар жүз мыңдаған доллар ұтып үлгерді.

Түйін

Теориялық қалыпты қисықты пайдаланудың үш жолын қарастырдық: шамадан жоғары және төмендегі жалпы аудандарды табу, екі балл арасындағы аудандарды табу және осы аудандарды ықтималдық ретінде көрсету. Қалыпты қисықты пайдаланудың үшінші тәсілі ең орындысы. Себебі инференциалды статистикалар, ықтималдықтарды осы тарауда келтірілген процеске өте ұқсас жолмен бағалаумен бірге аса маңызды орын алады.



Кітап: Статистика негіздері

Дәріс: Ықтималдықтарды бағалау үшін қалыпты қисықты қолдану



Кітап: Статистика негіздері

Дәріс: Ықтималдықтарды бағалау үшін қалыпты қисықты қолдану
