



8-дәріс



ҚАЗАҚСТАННЫҢ  
АШЫҚ  
УНИВЕРСИТЕТІ

# СТАТИСТИКА НЕГІЗДЕРІ

Қалыпты қисық





### Тарауды оқығаннан кейін:

1. Қалыпты қисық құрылымын анықтап, түсіндіре аласыз.
2. Эмпирикалық баллдарды  $Z$  баллдарға айналдырып,  $Z$  баллдар мен қалыпты қисық кестесін (А аппендиксі) осы қисық нүктелерінің үсті, асты және ортасындағы аудандарды табу үшін пайдаланасыз.
3. Ықтималдық тұрғысынан қисық астындағы аудандарды бөліп көрсете аласыз.
4. Бұл тақырыпта көрсетілетін статистикалық техникаларды келесі мәселелер үшін пайдаланылады:
5. «Джонның балы тест тапсырған оқушылардың 75%-ынан жоғары» немесе «Мэри математикалық қабілеті бойынша 98-процентильде» деген нақты тестілеудегі баллдардың позициясын сипаттау.

Қалыпты қисық – статистикадағы маңызды тұжырым. Арифметикалық орта және стандартты девиациямен бірге эмпирикалық үлестірім туралы нақты дескриптивті мәлімдеме жасау үшін қолданылады. Сондай-ақ, қалыпты қисық – инференциалды статистиканың негізінде жатқан теорияның өзегі.

Қалыпты қисық кейде тесттерге баға беру үшін қолданылады, мұны жиі кездестірген боларсыз. Әдетте, қалыпты қисық көбінесе «қоңырау қисық» деп аталады. Ал «қисықтағы» баға оқытушының баллдарды белгілі бір үлгіге сай болуын қалайды дегенді білдіреді: Модальдық баға  $C$  және  $A_s$  және  $F_s$ ,  $B_s$  және  $D_s$  деп белгіленген тең сандар болады. Басқаша айтқанда, бағалардың үлестірімі қоңырау немесе дөңес сияқты болуы керек.

### Қалыпты қисықтың ерекшеліктері

Қалыпты қисық – теориялық модель, сызықтық диаграмма (2-тарауды қараңыз), бірмодалды (яғни, бір ғана мода немесе шың бар), өте жатық және симметриялы (қиғаштанбаған), сондықтан мұнда арифметикалық орта, медиана және моданың мәні бір. Оның пішіні қоңырау тәрізді және құлашы екі жақ бағытқа да шексіз созылуы мүмкін. Әрине, осы мінсіз үлгіге ешқандай эмпирикалық үлестірім қалтқысыз сәйкес келмейді, бірақ кейбір айнымалылар (мысалы, сан жағынан үлкен мөлшерлі сыныптардан алынған тест нәтижелері, GRE сияқты стандартталған тест нәтижелері) қалыптылық жағдай туралы тұспалдау үшін жеткілікті мөлшерде. Өз кезегінде, бұл тұспал қалыпты қисықты ең маңызды пайдалануларының бірі - қалыпты қисық туралы біздің теориялық білімімізге негізделген эмпирикалық таралымның сипаттамасын жасауға мүмкіндік береді.

Қалыпты қисықтың маңызды тұсы – горизонталь осьтың бойындағы арифметикалық ортадан стандартты девиация арқылы өлшенетін қашықтық, ол әрқашан қисық астындағы жалпы ауданның бірдей үлесін қамтиды. Басқаша айтқанда, кез-келген нүктеден арифметикалық ортаға дейінгі қашықтық (стандартты девиация өлшенгенде) қисық астындағы ауданның дәл соған пропорционалды бөлігін кесіп тастайды.

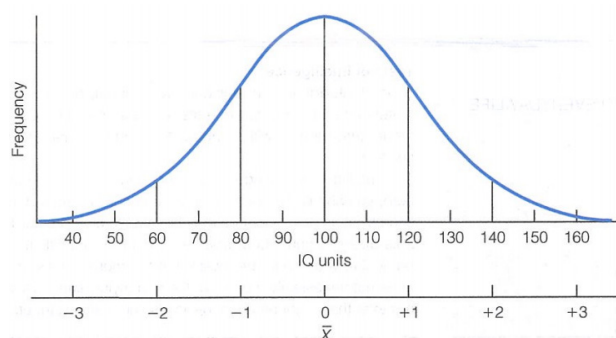
Мысалы, 5.1 және 5.2-сызбаларда IQ көрсеткіштерінің екі гипотезалық үлестірімі ұсынылған. Екеуі де қалыпты үлестірілген, бұл ойдан құрастырылған ерлер мен әйелдер тобы:

Ерлер	Әйелдер
$\bar{X} = 100$	$\bar{X} = 100$
$s = 20$	$s = 10$
$N = 1\,000$	$N = 1\,000$

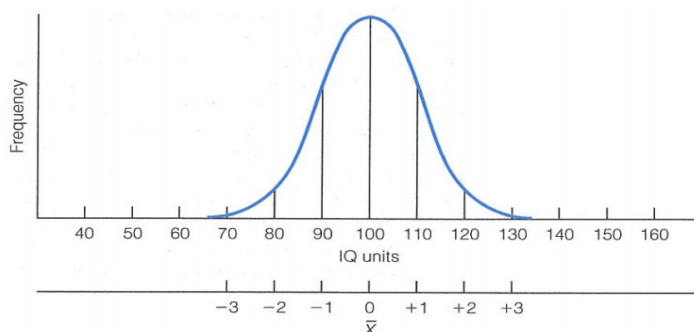
5.1 және 5.2-сызбалар графиктің горизонталь осіндегі екі шкала арқылы жасалған. Жоғарғы шкала «IQ бірліктерінде», ал төменгі шкала арифметикалық ортадан алынған стандартты девиация мәнімен белгіленген. Бұл шкалалар бір-бірін алмастыра алады және оларды бірінен екіншісіне ауыстыру оңай. Мысалы, ерлер үшін 120-ға тең IQ көрсеткіші арифметикалық ортадан бір стандартты девиация жоғары (естеріңізде болсын, ерлер тобы үшін,  $s = 20$ ), ал 140-қа тең IQ арифметикалық ортадан екі стандартты девиация жоғарыда (оң жақта). Арифметикалық ортаның сол жағындағы IQ көрсеткіштері стандартты девиация шкаласында теріс мәндер ретінде белгіленеді, өйткені олар арифметикалық ортадан аз. 80-ге тең IQ – арифметикалық ортадан бір стандартты девиация аз, 60-қа тең IQ көрсеткіші арифметикалық ортадан екі стандартты девиацияға аз және т.с.с. 5.2-сызба осыған ұқсас жолмен белгіленген, бір ғана өзгешелігі, оның стандартты девиациясы басқа мән ( $s = 10$ ) болғандықтан, белгілер әртүрлі нүктелерге қойылады.



### 5.1 – сызба. Ерлер тобының IQ бірліктері



### 5.2 – сызба. Әйелдер тобының IQ бірліктері



Әйелдер тобының іріктемесінде арифметикалық ортадан бір стандартты девиация жоғары – IQ 110-ға тең, ал арифметикалық ортадан бір стандартты девиацияға төмен – IQ 90-ға тең және т.с.с.

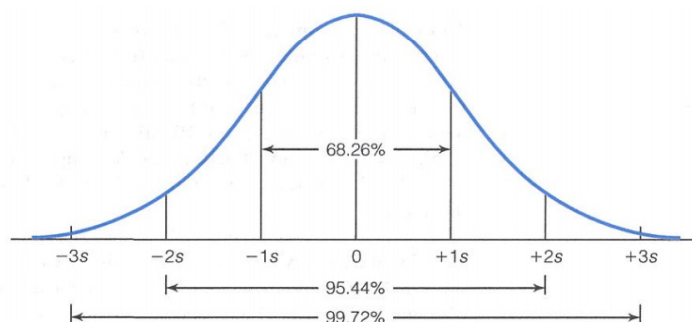
Қалыпты қисықта, көлденең ось бойындағы қашықтық стандартты девиациялармен өлшенген кезде, әрқашан қисық астындағы жалпы ауданның бірдей үлесін қамтитынын естеріңізге саламыз. Атап айтқанда, арифметикалық ортадан бір жоғары стандартты девиация мен арифметикалық ортадан бір төмен стандартты девиация ( $\pm 1$  стандартты девиация) арасындағы қашықтық қисықтың астындағы жалпы ауданның тура 68,26% -ын қамтиды. Бұл 5.1-сызбада жалпы ауданның 68,26%-ы 80 (- 1 стандартты девиация) мен 120 (+ 1 стандартты девиация) баллдары арасында жатыр дегенді білдіреді. Әйелдер тобының стандартты девиациясы – 10, сондықтан ауданның сондай пайыздық көрсеткіші (68,26%) 90 мен 110 баллдарының арасында жатады. Кез-келген қалыпты үлестірімде жалпы ауданның 68,26%-ы әрдайым  $\pm 1$  стандартты девиация арасында болады және ол өлшенетін арифметикалық орта мен стандартты девиация мәндерінің сипатынан тәуелсіз.

Арифметикалық орта мен қалыпты қисық астындағы аудан қашықтығының аралығындағы байланыспен танысқан жөн:

Аралық	Қисық астындағы аудандар
$\pm 1$ стандартты девиация	ауданның 68,26%-ы
$\pm 2$ стандартты девиация	ауданның 95,44%-ы
$\pm 3$ стандартты девиация	ауданның 99,72%-ы

Бұл қатынастар графикалық түрде 5.3-сызбада бейнеленген.

5.3-сызба Қалыпты қисық астындағы аудан



Осы арифметикалық орта мен аудан қашықтығы арасындағы байланысты пайдалана отырып, ең болмағанда қалыптыға жуық болып келетін эмпирикалық үлестірімді сипаттай аламыз. Жеке баллдардың позициясы арифметикалық ортаға, тұтас үлестірімге немесе үлестірімдегі кез-келген басқа баллдарға қатысты сипатталуы мүмкін.

Баллдар арасындағы аудандар тұтастай ауданның пайыздық көрсеткішімен емес, кейстердің санымен де көрсетіледі. Мысалы, 1 000 кейстің қалыпты үлестірімі 683 кейстен тұруы мүмкін (1 000 кейстің 68,26%-ы), ол – арифметикалық ортаның  $\pm 1$  аралығындағы стандартты девиациясы, 954-тің  $\pm 2$  аралығындағы стандартты девиациясы, сондай-ақ 997-нің  $\pm 3$  аралығындағы стандартты девиациясы. Демек, кез-келген қалыпты үлестірім үшін арифметикалық ортадан алыста жатқан біраз кейстерде  $\pm 3$  аралығындағы стандартты девиация болады.

### Қалыпты қисықты пайдалану

Біз арифметикалық ортадан жоғары немесе төмендегі стандартты девиациясы 1, 2 немесе 3 болатын баллдардың қалыпты қисықтың астында жатқан аудандарын табуға болатынына көз жеткіздік. Стандартты девиацияның нақты коэффициенттері емес мәндермен жұмыс істеу үшін бастапқы баллдарды стандартты девиация бірліктерінде көрсетуіміз қажет немесе оларды Z баллдарға түрлендіру керек. Бастапқы баллдар кез-келген өлшем бірлігінде болуы мүмкін (фут, IQ, доллар), бірақ Z баллдардың арифметикалық ортасы (0) мен стандартты девиациясы (1) әрдайым бірдей мәнге ие болады.

### Z баллдарды есептеу

Бастапқы баллдарды Z баллға айналдыруды мәндер шкаласын өзгерту процесі ретінде қарастыруға болады, яғни метрді ярдқа, километрді мильге немесе галлонды литрге өзгерту. Бұл бірліктер бір-біріне ұқсамайды, бірақ арақашықтық, ұзындық немесе көлемді білдіретін бірдей нақты тәсілдер. Мысалы, 1 миль – 1,61 километрге тең, сондықтан бір-бірінен 10 миль арақашықтықта орналасқан екі қала сәйкесінше 16,1 километр қашықтықта болады. Сол сияқты “5 шақырымдық” жарыс 3,10 мильді құрайды. Бәлкім, сізге километрге қарағанда мильмен есептеу оңай шығар, бірақ қашықтықты көрсетуде екеуі де тиімді.

Тура осы сияқты, бастапқы (немесе “өңделмеген”) баллдар және Z баллдар – теңдей екі мән, бірақ қалыпты қисық астындағы ауданды өлшеудің әртүрлі жолдары. Мысалы, 5.1-сызбада IQ бірліктері арқылы нақты баллдарды (Джон 120 балл жинады) немесе стандартты девиацияны (Джон арифметикалық ортадан 1 стандартты девиация жоғары балға ие болды) сипаттай аламыз.

Z баллды есептеуде өлшеудің бастапқы бірліктерін (IQ баллдар, дюймдер, долларлар т.с.с.) Z баллдарға айналдырамыз, яғни, осылайша қалыпты қисықты 0 мәнді арифметикалық орта мен 1 мәнді стандартты девиациясы бар үлестірімге “стандарттаймыз”. Эмпирикалық қалыпты үлестірімнің арифметикалық ортасы 0-ге, стандартты девиациясы 1-ге айналады, ал барлық мәндер Z баллдар түрінде көрсетіледі. Z баллдарды есептеудің формуласы:

5.1-формула

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$$

Бұл формула эмпирикалық қалыпты үлестірімдегі кез-келген баллды ( $X_i$ ) тура сондай Z баллға аударды.



120-ға тең өңделмеген балдардың  $Z$  баллмен тура келетінін көрсету үшін ер адамдардың IQ деректерін пайдаланамыз (5.1-сызба)

Оң 1,00-ді көрсететін  $Z$  балл бастапқы баллдың арифметикалық ортадан бір стандартты девиация жоғарыда (оң жаққа қарай) жататынын білдіреді. Теріс бал арифметикалық ортадан төменге (сол жаққа қарай) құлайды.

### Қалыпты қисық кестесі (А аппендиксі)

Статистиктер теориялық тұрғыдан қалыпты қисықты өте мұқият сипаттаған. Кез-келген  $Z$  балға қатысты аудандар дәл анықталған және ол кесте форматында берілген. Қалыпты қисық кестесі немесе  $Z$ -балл кестесі Статистика негіздері кітабының А аппендиксінде келтірілген, оны ашып көрсету мақсатында 5.1-кестеге ықшамдап орналастырдық.

Қалыпты қисық кестесінің үш бағаны бар: сол жақ бағанда  $Z$  балл ( $a$  бағана),  $Z$  балл мен арифметикалық орта арасындағы аудан ортаңғы баған ( $b$  баған), ал  $Z$ -баллдан тыс жатқан ауданды көрсететін оң жақтағы баған ( $c$  баған).  $Z$  баллмен арифметикалық орта арасындағы ауданды табу үшін  $Z$  балл бағанынан балды тапқанға шейін төмен қарай түсе беріңіз. Мысалы, А аппендиксі немесе 5.1-кестеден +1,00-ге сәйкес келетін  $Z$  баллды тапқанша  $a$  бағанымен төмен қарай жүріңіз. “ $Z$  балл мен арифметикалық орта арасындағы аудан”  $b$  бағанында 0,3413 санына сәйкес келетінін байқаймыз.

Кесте аудандарды пропорция түрінде көрсетеді, бірақ оларды 100-ге көбейту арқылы пайыздық көрсеткіштерге оңай ауыстыруға болады. «Қисық астындағы жалпы ауданның 0,3413 пропорциясы 1,00-ге тең  $Z$  балл мен арифметикалық орта арасында жатады» немесе «жалпы ауданның 34,13%-ы 1,00 мәнді  $Z$  балл мен арифметикалық орта аралығында» деуге болады.

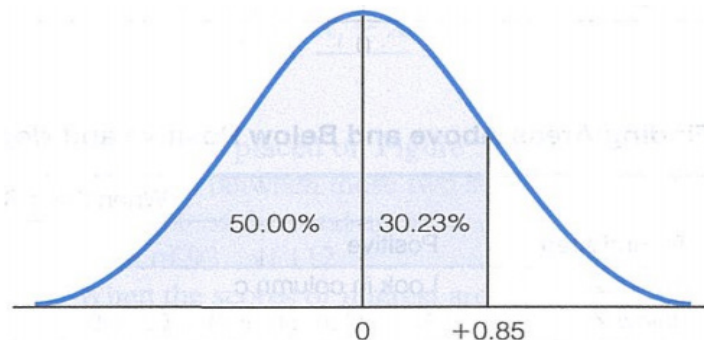
### Баллдан жоғарғы немесе төмендегі жалпы ауданды табу

Осы уақытқа дейін қалыпты қисық кестесін  $Z$  балы мен арифметикалық орта арасындағы аудандарды табу үшін қалай қолдануға болатынын қарастырдық. А аппендиксі эмпирикалық үлестірімдегі қалыпты формадағы басқа да аудандарды табу үшін пайдаланылады. Мысалы, 5.1-сызбада сипатталған үлестірімдегі екі ер субъектінің балдарынан төмен жалпы ауданды анықтау қажет. Бірінші субъект 117 балл ( $X_1 = 117$ ) алды, бұл +0,85  $Z$  баллға сәйкес келеді:

$$Z = \frac{X_1 - \bar{X}}{s} = \frac{117 - 100}{20} = \frac{17}{20} = +0,85$$

Плюс белгісі бар  $Z$  балл арифметикалық ортадан жоғары (оңға қарай) орналасады дегенді білдіреді.  $Z$  баллдан төмен оң ауданды табу үшін, бал мен арифметикалық орта арасындағы ( $b$  бағанасын қараңыз) ауданды арифметикалық ортадан төмендегі ауданға қосу керек. Бұрын ескерткеніміздей, қалыпты қисық симметриялы болады (қиғаштанбаған), арифметикалық ортасы оның медианасымен бірдей болады. Ендеше, арифметикалық ортадан төмен жатқан аудан 50%-ды құрайды (тура медиана сияқты). 5,4-сызбаны мұқият оқып шығыңыз. Біз тек боялған ауданға көңіл бөлеміз.

5,4-сызба Оң  $Z$  баллдан төмен ауданды табу



Қалыпты қисық кестесіне жүгіне отырып, бал мен арифметикалық орта арасындағы ауданның ( $b$  бағананы қараңыз) 30,23%-ды құрайтынын анықтадық. Сондықтан +0,85  $Z$  баллдан төмен жатқан аудан 80,23% (50,00% + 30,23%) болады. Бұл субъект тест тапсырғандардың 80,23% -нан жоғары бал алды.



Екінші субъектінің IQ балы – 73 ( $X_2 = 73$ ), бұл -1,35 Z баллға сәйкес:

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s} = \frac{73 - 100}{20} = \frac{-27}{20} = -1,35$$

Теріс балдан төмен жатқан ауданды табу үшін оң жақтағы немесе “Z баллдан тыс аудан” бағанын пайдаланамыз. 5.5-сызбадағы боялған ауданның өлшемін анықтау қажет. -1,35 балдың “тыс ауданы” (с бағанын қараңыз) 0,885 болады, бұны 8,85% деп алуға болады. Екінші субъект ( $X_2 = 73$ ) тест тапсырған топтың 8,85%-нан жоғары балл алды.

Жоғарыда келтірілген мысалдарда баллдан төменгі ауданды таптық. Тап осы әдістер баллдан жоғары ауданды табу үшін пайдаланылады. Мысалы, 108-ге тең IQ мәнінен жоғары ауданды анықтау қажет болса, алдымен Z баллға ауыстырамыз

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s} = \frac{108 - 100}{20} = \frac{8}{20} = +0,40$$

содан соң А аппендиксін сүзіп шығамыз. Бізге керегі – 5.6-сызбадағы боялған аудан. Оң баллдан жоғары жатқан аудан “Z баллдан тыс аудан” бағанынан табылды, бұл аудан 0,3446 немесе 34,46% -ға тең.

Бұл процедуралар 5.4-кестеде және “Рет-ретімен орында” қосымшасында түйінделген. Әуелде сізді шатастыруы мүмкін, бірақ әрдайым қисықты сызып, өзіңізді қызықтыратын ауданды күлгіндеп бояп алуыңыз қажет.

5,4-кесте. Оң және теріс шамадан жоғары және төмен жатқан аудандарды табу

Ауданды табу	Z шама болғанда	
	Оң	Теріс
Z шамадан жоғары Z шамадан төмен	с бағанына қараңыз 0,5000-ға b бағаны ауданын қосыңыз	0,5000-ға b бағаны ауданын қосыңыз с бағанына қараңыз

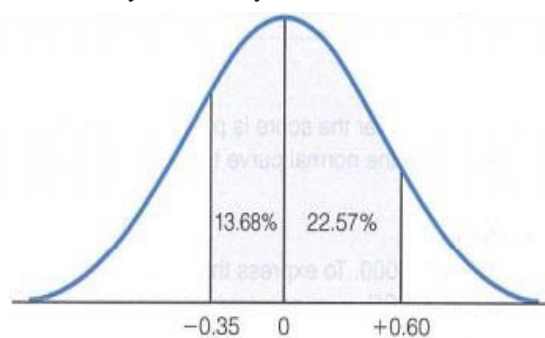
## Екі балл арасындағы ауданды табу

Кейде екі балл арасындағы ауданды анықтау қажет болады. Баллдар арифметикалық орта мәндердің қарама-қарсы жағында болған кезде, олардың арасындағы ауданды әрбір бал мен арифметикалық орта арасындағы аудандарды бір-біріне қосу арқылы анықтауға болады. Ерлердің IQ үлестірімін мысалға ала отырып, IQ-дің 93 және 112 көрсеткіштері арасындағы ауданды білгіңіз келсе, екі баллды да Z баллға ауыстырып, А аппендиксінен әрбір балл мен арифметикалық орта арасындағы ауданды тауып, осы екі ауданды бір-біріне қосамыз. Алғашқы 93 балға тең IQ -0.35 мәнді Z баллға өзгереді:

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s} = \frac{93 - 100}{20} = \frac{-7}{20} = -0,35$$

Баллдардың екеуі де 5.7-сызбада келтірілген. Бізге керегі 0 барлық боялған аудан.

5,7-сызба. Екі баллдар арасындағы ауданды табу





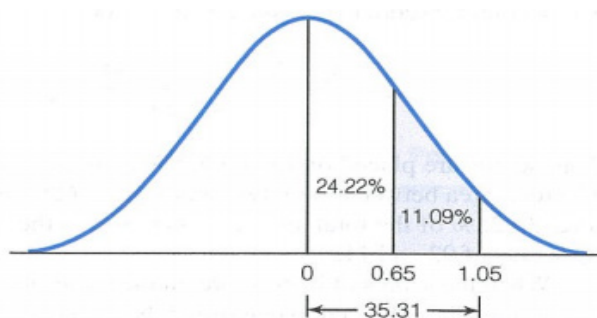
Осы екі балл арасындағы жалпы аудан  $13,68\% + 22,57\%$ , яғни  $36,25\%$ . Сондықтан,  $36,25\%$  мәнді жалпы аудан (немесе 1 000 кейстің 363-і) 93 пен 112 IQ баллы арасында жатыр.

$$z = \frac{X_i - \bar{X}}{s} = \frac{112 - 100}{20} = \frac{12}{20} = 0,60$$

Қызықтыратын балдар арифметикалық ортаның бір жағында ғана болғанда, олардың арасындағы ауданды анықтау үшін басқа әдіс-тәсілдер қолданылуы қажет. Мысалы, 113 пен 121 баллдарының арасындағы аудан қызықтырса, есептеуді Z баллға айналдырудан бастаймыз:

Балдар 5.8-сызбада көрсетілген; бізге керегі – боялған аудан.

5.8-сызба. Екі баллдар арасындағы ауданды табу



Арифметикалық ортаның бір жағындағы ауданды табу үшін әрбір бал мен арифметикалық орта арасындағы ауданды табыңыз, содан кейін кішірек ауданды үлкенірегінен шегеріп тастаңыз. А аппендиксіндегі b бағанының көмегімен, жалпы ауданның  $24,22\%$ -ы  $+0,65$  болатын Z балл мен арифметикалық орта арасында, ал ауданның  $35,31\%$ -ы  $+1,05$  болатын Z балл мен арифметикалық орта арасында орналасқанын көреміз. Демек, осы екі балл арасындағы аудан  $35,31\% - 24,22\%$  немесе жалпы ауданның  $11,09\%$ -ын құрайды. Егер екі бал да арифметикалық орта мәннен төмен болса да осы техниканы қолдануға болады. Екі балл арасындағы аудандарды табу процедуралары 5.5-кестеде және оқулықтың «Рет-ретімен орында» қосымшасында түйінделген. (Екі балл арасындағы аудандарды табуды үйрену үшін 5.3, 5.4 және 5.6-дан 5.9-ға дейінгі жаттығуларды орындаңыз).

## ТҮЙІН

1. Қалыпты қисық арифметикалық орта және стандартты девиациямен бірге, қалыпты таралған эмпирикалық үлестірімдер туралы нақты дескриптивті мәлімдемелерді жасау үшін пайдаланады.
2. Теориялық қалыпты қисықпен жұмыс істеу үшін алғашқы шамаларды балама Z шамаға айналдыру қажет. Z шама теориялық қалыпты қисық астындағы аудандарды табуға мүмкіндік береді (А аппендиксі).